

ИЗУЧЕНИЕ СИСТЕМ, ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНАМИ С ИЗЛОМОМ

А. А. Шамина^{1,2}, А. В. Звягин¹, А. В. Акулич², В. В. Тюренкова^{1,2}, Н. Н. Смирнов^{1,2}

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация, zvyagin.aleksandr2012@yandex.ru

² Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

Аннотация: прочность летательных аппаратов любых типов — важнейший вопрос безопасности полетов. Наличие скрытых дефектов в материале существенно влияет на прочность при различных нагрузках. Важными характеристиками прочности материалов с дефектами являются скорость и направление роста трещины, а также величина критической нагрузки (коэффициента интенсивности напряжений), при которой начинается рост трещины. В данной работе исследуется трехмерная упругая среда, ослабленная системой плоских трещин и одной трещиной с изгибом. В качестве численного метода был выбран метод граничных элементов, а именно метод разрывных перемещений. Код реализован на C++. Было проведено сравнение с известными аналитическими результатами. Изучено поведение трещин при изгибе при различных нагрузках.

Ключевые слова: трёхмерное пространство, упругая среда, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, метод граничных элементов, метод разрывных смещений.

Благодарности: работа выполнена при поддержке программы научных исследований РАН АААА-А18-118041190145-1 (0065-2019-0021).

Для цитирования: Шамина А. А., Звягин А. В., Акулич А. В., Тюренкова В. В., Смирнов Н. Н. Изучение систем, ослабленных трещинами с изломом. *Успехи кибернетики*. 2020;1(2):29–38.

INVESTIGATION OF SYSTEMS WEAKENED BY KINKED CRACKS

Anastasiya A. Shamina^{1,2}, Alexandr V. Zvyagin¹, Anna V. Akulich², Veronika V. Tyurenkova^{1,2}, Nikolay N. Smirnov^{1,2}

¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, zvyagin.aleksandr2012@yandex.ru

² Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract: structural strength of aircraft is a key aspect of flight safety. Hidden defects in the material significantly affect its strength under various loads. The crack growth rate and direction, and the crack growth threshold load (stress intensity factor) affect the strength of the damaged material. This study investigates a 3D elastic structure weakened by a system of flat cracks and a kinked crack. The numerical method used was the boundary element method, specifically, the displacement discontinuity method. The code was developed with C++. The results were compared against the available analytic results. The behavior of cracks under bending and a range of loading conditions was studied.

Keywords: 3D space, elastic medium, crack, stress intensity factor, boundary element method, displacement discontinuity method.

Acknowledgements: this study is supported by the RAS research program АААА-А18-118041190145-1 (0065-2019-0021).

Cite this article: Shamina A. A., Zvyagin A. V., Akulich A. V., Tyurenkova V. V., Smirnov N. N. Investigation of Systems Weakened by Kinked Cracks. *Russian Journal of Cybernetics*. 2020;1(2):29–38.

Введение

Конструкции могут испытывать плановые и случайные внешние нагрузки, влияющие на их безопасность [1]. Исследование прочности конструкции летательных аппаратов – сложный процесс, который можно рассматривать с разных точек зрения. Исследование прочности при различных типах нагрузок представлено в [2, 5], а прочность при высокотемпературных нагрузках обсуждается в [3].

Также были проведены исследования, в которых исследовалось пространственное разрушение мембраны [6]. Проблема разрушения астероидов при их взаимодействии с ударными или взрывающимися ракетами также является актуальной задачей [4]. Данные о наличии микродефектов внутри астероидов помогают нам понять, где находятся неоднородности. Это позволяет спрогнозировать, в какую область следует направить ударный элемент, чтобы взорвать астероид, получив максимальный эффект при минимальных затратах. При разработке таких миссий требуется прогностическое численное моделирование, которое во многом опирается на науку о прочности материалов и конструкций, в частности, на механику линейного разрушения. Основы этой теории были разработаны в [7, 8]. Первичная причина разрушения — наличие дефектов в материале в виде так называемых трещин, которые математически моделируются скачком поля смещения на определенной части поверхности. Для упругой среды это приводит к появлению особенностей на границе трещин. При приближении к границе трещины напряжения стремятся к бесконечности, т.е. концентрация напряжений происходит в достаточно малой окрестности границы. Поскольку существование бесконечных напряжений в реальных материалах невозможно, вблизи краев трещины возникает область необратимых пластических деформаций. Тем не менее в случаях, когда размер этого поля мал по сравнению с размером самой трещины, применимость критериев роста трещины основана на анализе полученного упругого решения [9–14]. Линейная механика разрушения быстро развивалась и в настоящее время является одним из основных инструментов оценки прочности материалов с дефектами. Достаточно полное представление о результатах, полученных в этой области, дают обзоры [14–18].

В качестве основных функций разложения решения мы используем три фундаментальных решения теории упругости о разрыве трех компонент вектора смещения на поверхности граничного элемента. Общее решение всей задачи представляется в виде суммы с неопределенными коэффициентами, т.е. в виде конечного ряда аналитически заданных базисных функций. Коэффициенты ряда определяются методом коллокаций на границе (граничные условия выполняются только в центрах граничных элементов). Такой подход позволяет избежать вычисления сингулярных интегралов, возникающих при использовании прямых методов граничных интегральных уравнений.

Преимущество метода граничных элементов состоит в том, что только поверхность трещин, моделирующая разрыв упругой среды, разбивается на конечные элементы. Это снижает масштабность проблемы на этапе ее решения. Для каждого элемента используются три независимых аналитических решения, в каждом из которых одна из трех компонент вектора смещения терпит разрыв в элементе. Решение конкретной краевой задачи ищется в виде ряда с неопределенными коэффициентами по всему набору элементов. Каждое элементарное решение вносит вклад в поле смещения и в поле напряжений с весом, который является соответствующим неопределенным коэффициентом ряда. Выполнение конкретных граничных условий приводит к системе линейных уравнений после численного определения коэффициентов разложения. Фактически у нас есть аналитическое представление решения в виде конечного ряда внутри области. С точки зрения памяти, нам нужно только сохранить найденные коэффициенты разложения, которые затем позволят нам найти любые требуемые характеристики в любой точке области решения. Это важно с точки зрения простоты практического использования полученного решения. Еще одним важным преимуществом предложенного метода является возможность решения любых краевых задач (задача в напряжениях, задача в перемещениях, любая смешанная задача).

Недостатком метода является его слабая математическая достоверность; поэтому требуется большой объем работы, связанный с проверкой достоверности результатов. Для этого было проведено сравнение с имеющимися аналитическими решениями пространственных задач, а также с известными результатами численного решения задач механики разрушения, полученными другими численными методами. Программные коды реализованы авторами на языке C++. Основной характеристикой линейной механики разрушения является коэффициент интенсивности напряжений на краю трещины (рис. 1), который в случае деформации растяжения в направлении по нормали к плоскости трещины определяется:

$$K_I = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \cdot \sigma_{zz}(s),$$

в случае деформации сдвига в плоскости трещины по нормали к ее краю определяется:

$$K_{II} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \cdot \sigma_{nz}(s),$$

а в случае антиплоской деформации (сдвига в плоскости трещины по касательной к краю) определяется:

$$K_{III} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \cdot \sigma_{\tau z}(s).$$

Эта задача решалась численно в трехмерной постановке для разных радиусов. Результаты сравнения позволяют говорить о достаточной эффективности и удовлетворительной точности предложенного метода [22].

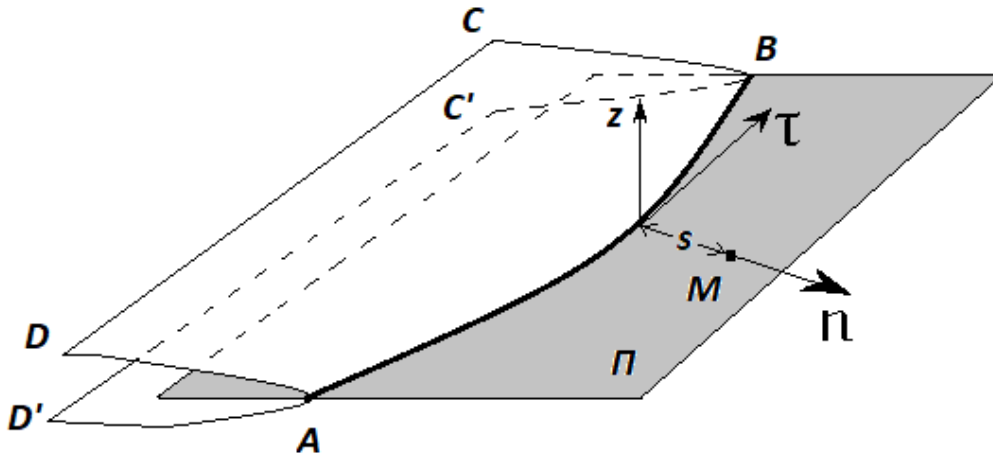


Рис. 1. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для случаев различных типов деформаций

Написанная программа была протестирована путем сравнения с известными аналитическими решениями [15–16], [19–21]. Сравнение показало хорошее качественное и количественное согласие с имеющимися результатами других авторов. Например, было проведено сравнение с решением для осесимметричной трещины в виде диска, которая находится под действием внутреннего давления. В цилиндрической системе координат r, φ, z (трещине соответствует диск $z = 0, 0 \leq r \leq R$) и в данной задаче имеем граничные условия: $z = 0, 0 \leq r \leq R, \sigma_{zz} = -p, \sigma_{rz} = 0$. В аналитическом решении для круглой трещины величина K_I равна:

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi R}} \int_0^R \frac{r \sigma_{zz}(r) dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Круглая трещина с изломом (угол излома 30°) находится под внутренним давлением $p = 0.1$

Представляют определенный практический интерес трещины, поверхность которых имеет излом (угол между плоскостями отдельных сегментов трещины отличен от нуля). Такая геометрическая конфигурация может возникнуть при слиянии двух отдельных плоских трещин. В линейной теории упругости наличие любых скачков в граничных условиях приводит к возникновению особенностей решения. Поскольку сама модель трещины (поверхность разрыва поля перемещений) несёт особенность решения, интересно исследовать влияние возможного излома ее поверхности на изменение распределения напряжений в окрестности края трещины.

Рассматривается упругая среда, ослабленная трещиной с изломом. Трещина является активной, то есть она нагружена внутренним давлением P , как показано на рис. 2. Геометрически поверхность трещины представляет собой два полуокруга одного радиуса, плоскости которых расположены под заданным углом друг к другу. Требуется исследовать, в каком направлении наиболее вероятен рост трещины.

В качестве основной характеристики, отвечающей за возможный рост трещины, принята величина J -интеграла Черепанова–Райса. Данный интеграл представляет собой комбинацию квадратов

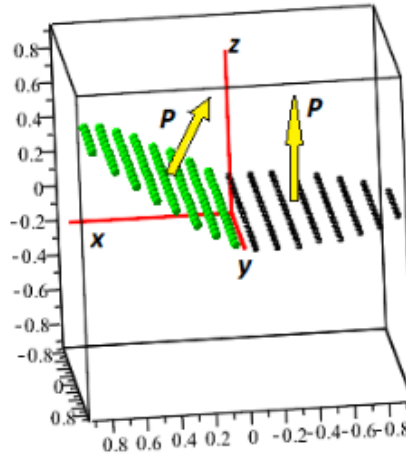


Рис. 2. Трещина с изломом под внутренним давлением, направленным по нормали к берегам трещины

коэффициентов интенсивности напряжений (Черепанов, Райс) [11–13]:

$$J = \frac{1 - \nu}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2.$$

Поскольку в рассматриваемой геометрической конфигурации две половины трещины равноправны, исследовался край той половины трещины, которая расположена в плоскости xy (рис. 2). В расчетах использованы безразмерные величины: единицей длины считается радиус полукруга каждой половины трещины; напряжения и давление отнесены к величине 2μ , коэффициент Пуассона выбран равным $\nu = 0.25$. В качестве внутреннего давления принята величина $p = P/2\mu = 0.1$. Такое нерельяно большое давление выбрано для возможности визуализации раскрытия трещины. Назовём углом излома угол между плоскостями двух плоских полукруглых сегментов трещины. В работе для сравнения представлены расчеты для двух углов излома величиной 30° и 60° .

На рис. 3 представлены графики зависимости величины J от угла. Угол отсчитывается вдоль дуги круглого края трещины и изменяется в пределах $[-\pi/2, \pi/2]$. Нулевая величина угла соответствует точке $x = -1, y = 0, z = 0$ (рис. 2), величина угла $\pi/2$ — соответствует точке с координатами $x = 0, y = 1, z = 0$, угол $-\pi/2$ — точке с координатами $x = 0, y = -1, z = 0$. Две последних точки находятся на линии излома, которая является частью оси y (рис. 2). На рис. 3а приведена зависимость J для угла излома 30° , на Рис. 2б — для угла излома 60° .

Как следует из приведенных на рис. 3 а и б зависимостей, максимальные значения J для обоих углов достигаются в точках, лежащих на линии излома, т.е. на оси y . Это означает, что возможный рост трещины будет развиваться в направлениях линии излома. С увеличением угла излома увеличился максимум J -интеграла и уменьшился минимум. Влияние величины угла излома на качественный вид кривой распределения J -интеграла незначительно.

На рис. 4 представлено раскрытие трещины в сечении излома $x = 0$. Под раскрытием понимается величина разности перемещений, соответствующих верхнему и нижнему берегу трещины. На рис. 4а и 4б представлено трёхмерное раскрытие половины трещины (точки разного цвета соответствуют верхнему и нижнему берегу) соответственно для углов излома 30° и 60° . Сплошная кривая показывает положение точек в сечении излома. Как видим, влияние угла излома на раскрытие также незначительно.

На рис. 5 показано раскрытие всей трещины в сечении $y = 0$ (рис. 5а соответствует углу излома 30° , рис. 5б — углу излома 60°). Приведенные результаты позволяют сделать вывод о том, что раскрытие трещины в основном определяется давлением и слабо зависит от угла излома.

Из графиков (рис. 4–5) видно, что максимальное раскрытие достигается в сечении излома $x = 0$. Это соответствует результатам расположения максимальных значений J -интеграла и направлениям возможного роста трещины вдоль оси y .

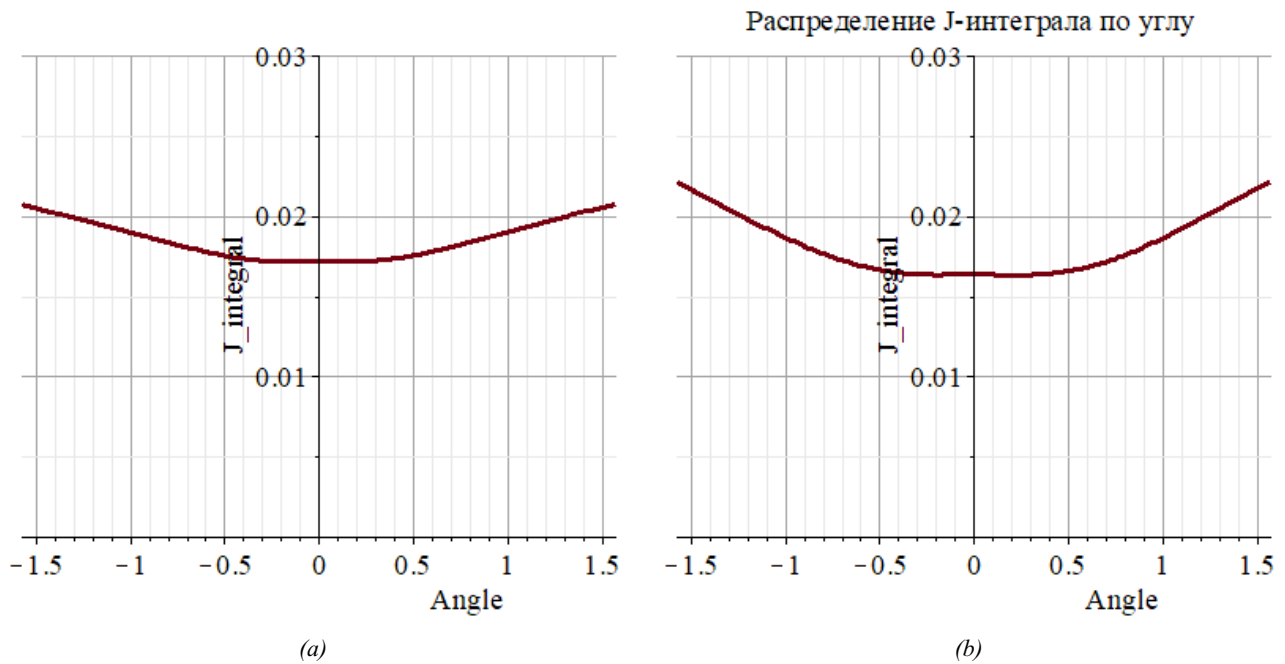


Рис. 3. J -интеграл на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, а — для угла излома 30° , б — для угла излома 60°

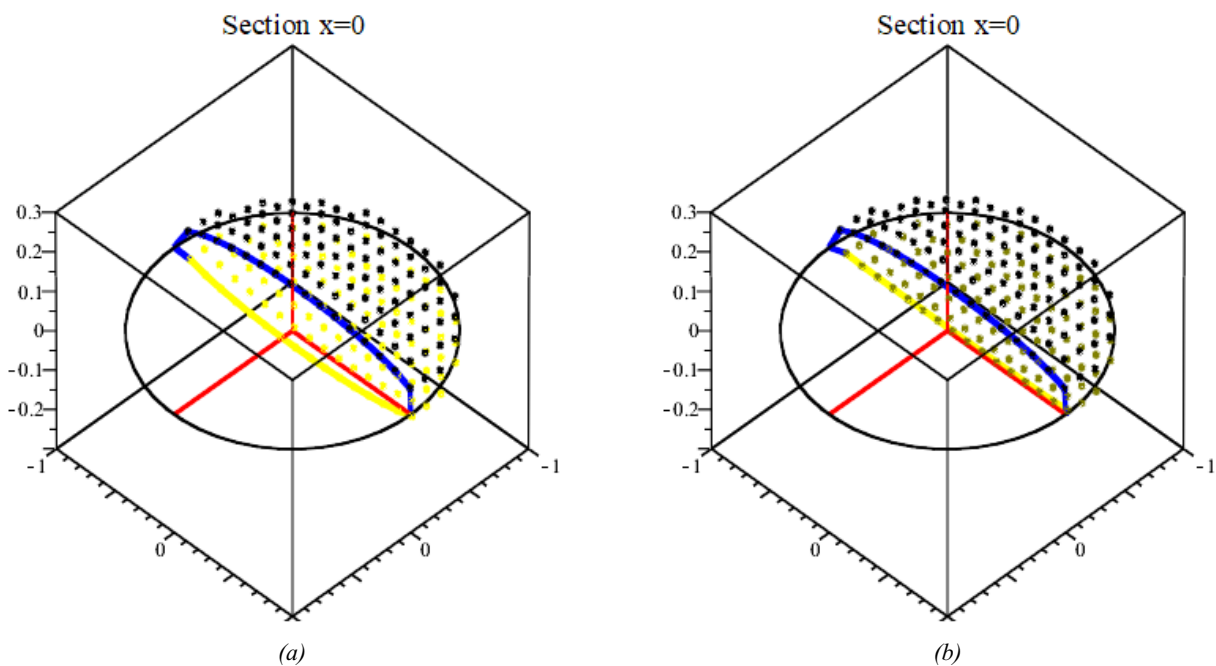


Рис. 4. Раскрытие трещины в пространстве (а — угол излома 30° , б — угол излома 60°). Сплошная кривая соответствует точкам сечения $x = 0$

Как известно, в окрестности границы трещины напряжения имеют особенность $\sigma \sim C/\sqrt{s}$, где s — расстояние до края трещины. Для контроля напряжений был произведен их расчёт в цилиндрической системе координат r, φ, z для углов $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]$, соответствующих границе полуокружности $z = 0, x^2 + y^2 = R^2, x \leq 0$. В качестве значения радиуса была взята величина $R = 1.01$. Это соответствует значению расстояния s до границы, равному $s = 0.01$.

Графики распределения напряжений по краю трещины, в зависимости от угловой координаты ϕ в полярной системе координат, показаны на рис. 6 (а — соответствует углу излома 30° , б — углу излома 60°).

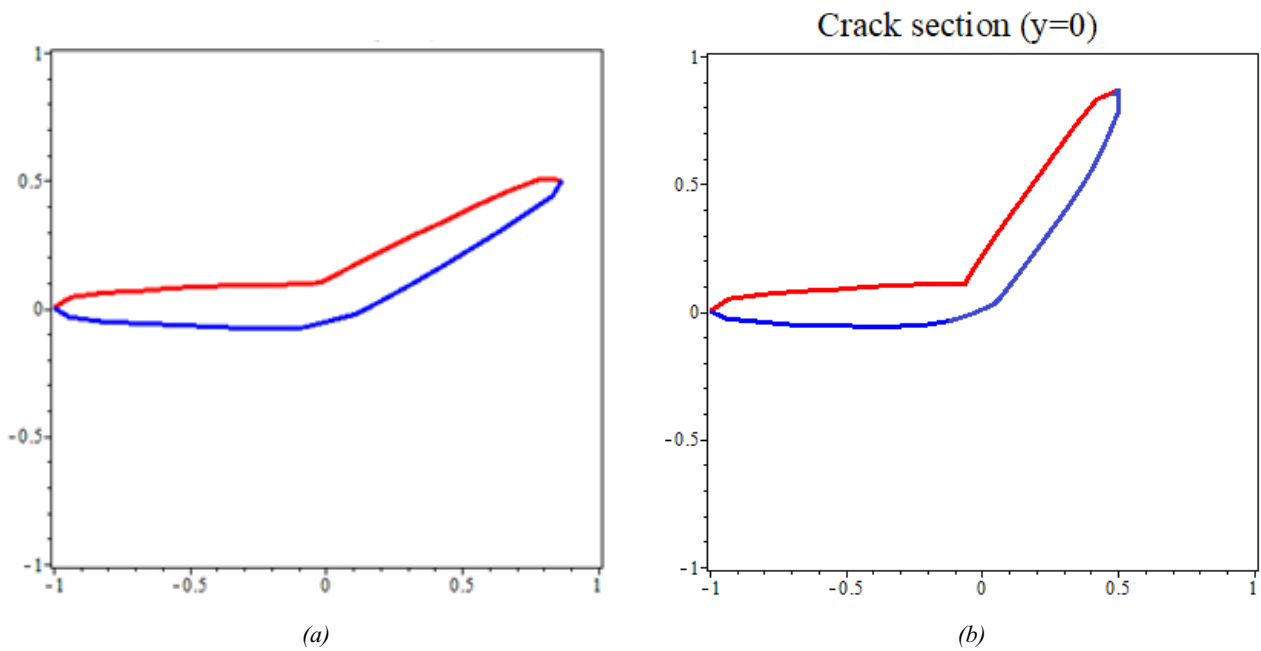


Рис. 5. Раскрытие трещины в сечении $y = 0$ (a — угол излома 30° , b — угол излома 60°)

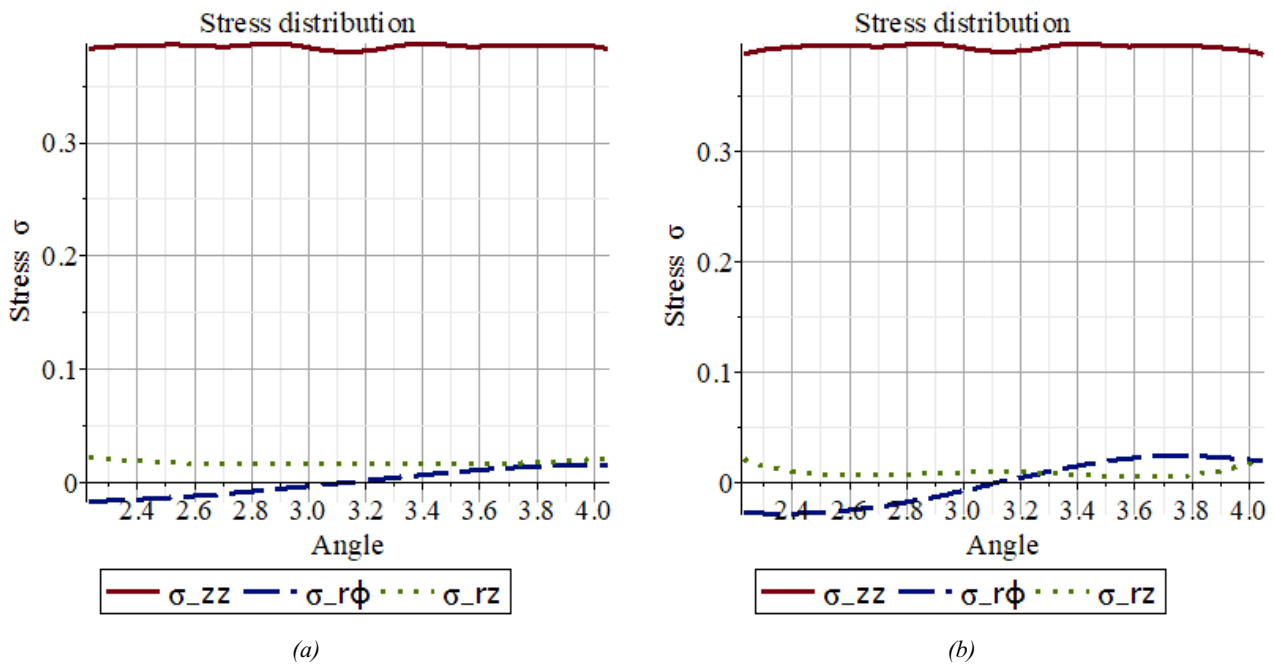


Рис. 6. Графики зависимости напряжений σ_{zz} , $\sigma_{r\phi}$, σ_{rz} от угловой координаты ϕ вдоль границы трещины в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) , $r = 1.01$, $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$, $z = 0$ (a — угол излома 30° , b — угол излома 60°)

Видно (рис. 6), что напряжения σ_{zz} фактически не зависят от угла излома. Наиболее сильно отличаются напряжения σ_{rz} . То есть данные расчеты показывают, что рост J -интеграла при приближении к излому, в основном, обеспечивается ростом напряжения σ_{rz} . Таким образом, трещина при выполнении критерия разрушения будет расти в направлении линии излома.

Для того чтобы проверить влияние способа нагрузки трещины, были произведены расчеты, в которых берега трещины свободны от нагрузок, при этом упругое пространство подвержено растяжению напряжениями, действующими на бесконечности вдоль оси z . То есть рассматривается упругая

среда, ослабленная трещиной с изломом. Угол излома известен и равен 30° . На бесконечности перпендикулярно плоскости одной из частей трещин приложена растягивающая нагрузка $\sigma = 0.1$, как показано на рис. 7.

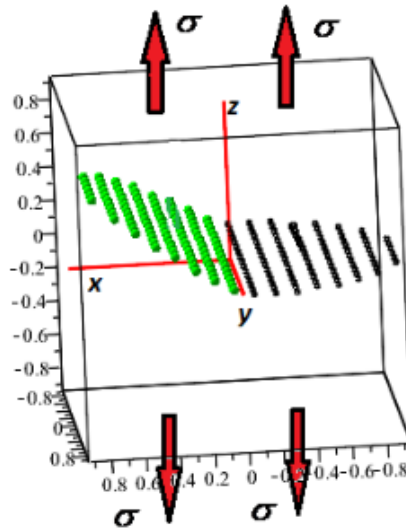


Рис. 7. Трещина с изломом 30° , нагрузка приложена в направлении оси OZ

На рис. 8 приведены графики коэффициентов интенсивности напряжений K_I, K_{II}, K_{III} соответственно. Коэффициенты интенсивности вычислялись по методу перемещений с использованием асимптотических формул:

$$u_z = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\vartheta - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\vartheta + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$u_y = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

На графиках представлено распределение соответствующих коэффициентов на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Нулевой угол соответствует точке границы трещины $x = -1, y = 0, z = 0$, углы $(-\pi/2, \pi/2)$ соответствуют точкам излома границы.

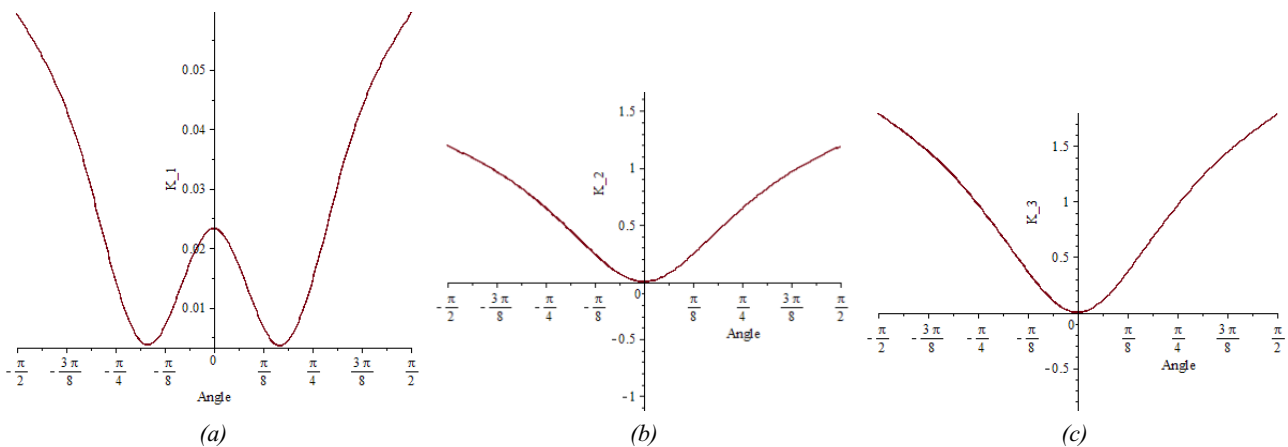


Рис. 8. Распределение коэффициентов интенсивности: *a* – K_I , *b* – K_{II} , *c* – K_{III}

J -интеграл и распределение напряжений вдоль границы сегмента трещины, перпендикулярного оси z в цилиндрической системе координат, представлены на рис. 9 а, б соответственно. Как и в предыдущих случаях, использована величина расстояния до края трещины $s = 0.01$.

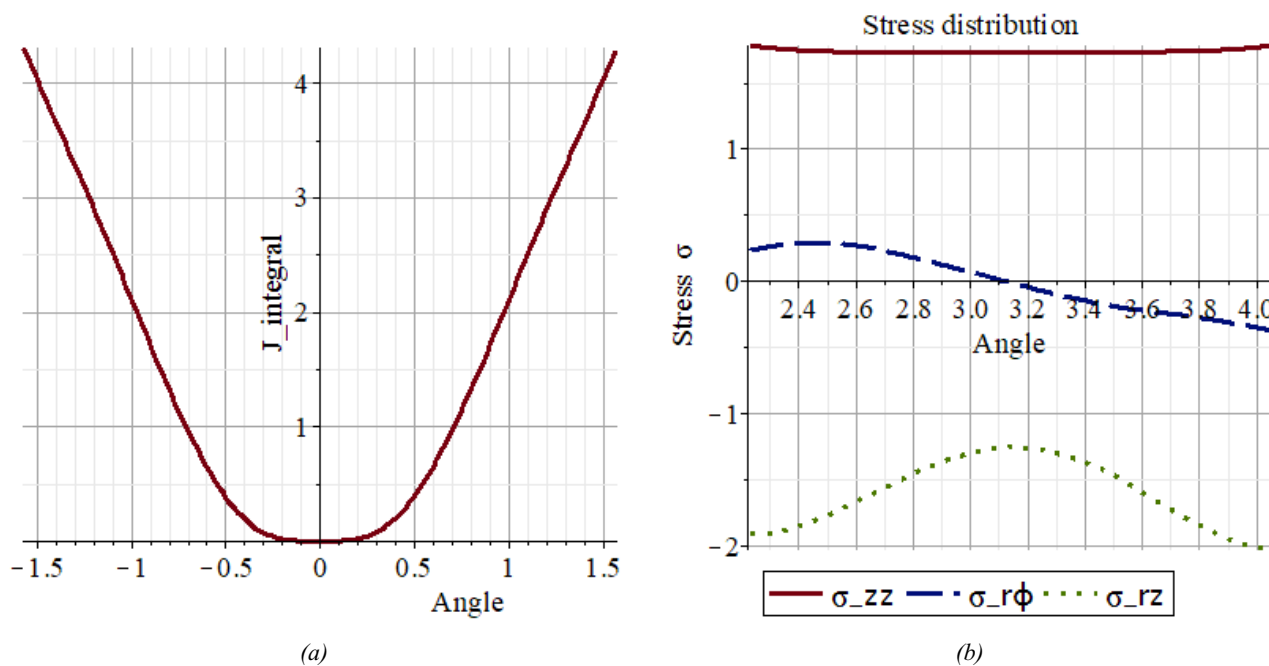


Рис. 9. *a* – *J*-интеграл, *b* – распределение напряжений

Приведенные расчёты показывают очень сильную зависимость задачи от характера нагрузки.

Выводы

1. Трещины с изломом всегда начинают расти вдоль линии излома, независимо от вида нагрузки.
2. Если трещина с изломом находится под давлением, то ее раскрытие и распределение напряжений слабо зависят от угла излома (они чуть больше при большем угле излома).
3. Напряжения очень сильно зависят от характера нагрузки трещины. Если трещина с изломом пассивна, а нагрузка приложена на бесконечности, то напряжения в окрестности трещины очень сильно отличаются.
4. Трещина под нагрузкой, приложенной на бесконечности, менее устойчива. Это следует из сравнения величины комбинации коэффициентов интенсивности напряжений для трещины под давлением и для трещины в пространстве, подвергнутой растяжению на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smirnov N. N., Kiselev A. B., Smirnova M. N., Nikitin V. F. Space Traffic Hazards from Orbital Debris Mitigation Strategies. *Acta Astronautica*. 2015;109:144-152.
2. Xiaogang L., Xiaotian Zh. The Strength Analysis of Steel Sunk Screw Connections in the Rocket. *Acta Astronautica*. 2017;137:345-352
3. Pisarenko G. S., Tretyachenko G. N. On Some Problems of Strength of Heat-Shield Materials. *Acta Astronautica*. 1983;10(7):521-525.
4. Dearborn D. S. P., Syal M. B., Barbee B. W., Gisler G., Greenaugh K., Howley K. M., Leung R., Lyzhoft J., Miller P. L., Nuth J. A., Plesko C. S., Seery B. D., Wasem J. V., Weaver R. P., Zebenay M. Options and Uncertainties in Planetary Defense: Impulse-Dependent Response and the Physical Properties of Asteroids. *Acta Astronautica*. 2020;166:290-305.
5. Kubota Y., Miyamoto O., Aoki T., Ishida Y., Ogasawara T., Umezu Sh. New Thermal Protection System Using High-Temperature Carbon Fibre-Reinforced Plastic Sandwich Panel. *Acta Astronautica*. 2019;160:519-526.
6. Qingxi H., Wanyuan L., Haiguang Zh., Dali L., Fujun P., Yongchao D. Research into Topology Optimization and the FDM Method for a Space Cracked Membrane. *Acta Astronautica*. 2017;136:443-449.

7. Griffith A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. 1921;221:163–198.
8. Griffith A. A. The Theory of Rupture. *Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics*. Delft, 1924. P. 55–63.
9. Orowan E. Energy Criteria of Fracture. *The Welding Journal*. 1955;34(3):1576–1606.
10. Irwing G. R. Fracture Dynamics. *Fracturing in Metals*. Cleveland: ASM; 1948. P. 147–166.
11. Rice J. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *J. Appl. Mech.* 1968;35:379–386.
12. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. *Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения*. М.: Мир; 1975. С. 204–335.
13. Cherepanov G. P. Crack Propagation in Continuous Media. *J. Appl. Math. Mech.* 1967;31:503–512.
14. Кит Г. С., Хай М. В. *Метод потенциалов в трёхмерных задачах термоупругости тел с трещинами*. Киев: Наукова думка; 1989. 288 с.
15. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений*: В двух томах. Т. 1 / Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир; 1990. 448 с.
16. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений*: В двух томах. Т. 2 / Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир; 1990. 1016 с.
17. Sleyuan L. I. *Models and Phenomena in Fracture Mechanics*. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer. 2002. 577 p.
18. Шифрин Е. И. *Пространственные задачи линейной механики разрушения*. М.: Издательство физико-математической литературы; 2002. 368 с.
19. Уфлянд Я. С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Л.: Наука, 1967. 402 с.
20. Гольдштейн Р. В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде. *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1979;3:111–126.
21. Kassir M. K., Sih G. C. External Crack in Elastic Solid. *The International Journal of Fracture Mechanics*. 1968;4(4):347–356.
22. Звягин А. В., Панфилов Д. И., Шамина А. А. Взаимное влияние дискообразных трещин в трёхмерном упругом пространстве. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2019;4:34–41.

REFERENCES

1. Smirnov N. N., Kiselev A. B., Smirnova M. N., Nikitin V. F. Space Traffic Hazards from Orbital Debris Mitigation Strategies. *Acta Astronautica*. 2015;109:144–152.
2. Xiaogang L., Xiaotian Zh. The Strength Analysis of Steel Sunk Screw Connections in the Rocket. *Acta Astronautica*. 2017;137:345–352
3. Pisarenko G. S., Tretyachenko G. N. On Some Problems of Strength of Heat-Shield Materials. *Acta Astronautica*. 1983;10(7):521–525.
4. Dearborn D. S. P., Syal M. B., Barbee B. W., Gisler G., Greenough K., Howley K. M., Leung R., Lyzhof J., Miller P. L., Nuth J. A., Plesko C. S., Seery B. D., Wasem J. V., Weaver R. P., Zebenay M. Options and Uncertainties in Planetary Defense: Impulse-Dependent Response and the Physical Properties of Asteroids. *Acta Astronautica*. 2020;166:290–305.
5. Kubota Y., Miyamoto O., Aoki T., Ishida Y., Ogasawara T., Umezu Sh. New Thermal Protection System Using High-Temperature Carbon Fibre-Reinforced Plastic Sandwich Panel. *Acta Astronautica*. 2019;160:519–526.
6. Qingxi H., Wanyuan L., Haiguang Zh., Dali L., Fujun P., Yongchao D. Research into Topology Optimization and the FDM Method for a Space Cracked Membrane. *Acta Astronautica*. 2017;136:443–449.
7. Griffith A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. 1921;221:163–198.
8. Griffith A. A. The Theory of Rupture. *Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics*. Delft, 1924. P. 55–63.
9. Orowan E. Energy Criteria of Fracture. *The Welding Journal*. 1955;34(3):1576–1606.
10. Irwing G. R. Fracture Dynamics. *Fracturing in Metals*. Cleveland: ASM; 1948. P. 147–166.

11. Rice J. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *J. Appl. Mech.* 1968;35:379-386.
12. Rais Dzh. Matematicheskie metody v mekhanike razrusheniya. *Razrushenie. T. 2. Matematicheskie osnovy teorii razrusheniya.* M.: Mir; 1975. P. 204–335.
13. Cherepanov G. P. Crack Propagation in Continuous Media. *J. Appl. Math. Mech.* 1967;31:503-512.
14. Kit G. S., Khai M. V. *Metod potentsialov v trekhmernykh zadachakh termouprugosti tel s treshchinami.* Kiev: Naukova dumka; 1989. 288 p. (In Russ.)
15. *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazhenii.* V. 1 / Ed. Yu. Murakami. M.: Mir; 1990. 448 p.
16. *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazhenii.* V. 2 / Ed. Yu. Murakami. M.: Mir; 1990. 1016 p.
17. Slepian L. I. *Models and Phenomena in Fracture Mechanics.* Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer. 2002. 577 p.
18. Shifrin E. I. *Prostranstvennyye zadachi lineinoi mekhaniki razrusheniya.* M.: Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 2002. 368 p. (In Russ.)
19. Uflyand Ya. S. *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti.* L.: Nauka, 1967. 402 p. (In Russ.)
20. Goldshtein R. V. Flat Crack of Arbitrary Discontinuity in Elastic Medium. *Mechanics of Solids.* 1979;3:111-126. (In Russ.)
21. Kassir M. K., Sih G. C. External Crack in Elastic Solid. *The International Journal of Fracture Mechanics.* 1968;4(4):347-356.
22. Zvyagin A. V., Panfilov D. I., Shamina A. A. The Mutual Influence of Disk-Shaped Cracks in Three-Dimensional Elastic Space. *Moscow University Mechanics Bulletin.* 2019;74(4):89-96.